EXERCICE 6 :

LES COUTS DE L'ENTREPRISE EN COURTE PERIODE

En courte période, le coût variable total d'une entreprise varie (CVT) en fonction de la quantité produite (Q), selon la relation $CVT = Q^3 - 10Q^2 + 50Q$. L'entreprise considérée supporte aussi un coût fixe CF = 72.

a- Calculer et représenter sur un graphique le coût total, le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen dans l'entreprise. Pour les valeurs de la quantité comprise entre 0 et 9 unités.

b- Commenter la forme de la courbe du coût total dans l'entreprise et vérifier l'existence d'un point d'infection.

c- Expliquer les positions respectives de la courbe du coût marginal et du coût moyen de l'entreprise.

d- Après avoir analyser les positions respectives des courbes du coût variable marginal et du coût moyen de l'entreprise, analyser une position respective des courbes du coût marginal et du coût variable marginal.

Solution de l'exercice n° 6 :

a- Le coût total est égal à la somme du coût fixe total et du coût variable total : $CT = CF + CVT = Q^3 - 10Q^2 + 50Q + 72$.

Les valeurs du cou^t total, pour Q variante de 1 à 9 unités (voir tableau), sont calculées comme suit ; par exemple :

Pour $Q = 1 \Rightarrow CT = 1 - 10 + 50 + 72 = 113$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow CT = 8 - 40 + 100 + 72 = 140$; etc.

Le coût moyen (CM) est le coût supporté par unité de produit. Il est égal au coût total divisé par la quantité produite.

Les valeurs du coût moyen, pour L variant de 1 à 9 unités (voir tableau), sont calculées comme suit, par exemple :

Pour $Q = 1 \Rightarrow CM = 1 - 10 + 50 + 72 = 113$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow CM = 4 - 20 + 50 + 36 = 70$, etc.

Le coût marginal (Cm) est égal à la dérivée de la fonction de coût total par rapport à la quantité produite et correspond à l'expression de la pente de la tangente à la courbe de coût total en chacun de ses points.

Rappelons qu'une de la forme « $y = ax^3 + bx^2 + cx$ » admet pour fonction dérivée : $y' = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$.

On a donc : $Cm = \frac{dCT}{dQ} = 3Q^2 - 20Q + 50$.

Alors : Pour $Q = 1 \Rightarrow Cm = 3 - 20 - 50 = 33$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow Cm = 12 - 40 + 50 = 22$. Etc.

Le coût variable moyen (CVM) est le coût variable supporté par unité produite. Il est égal au coût variable total divisé par la quantité produite :

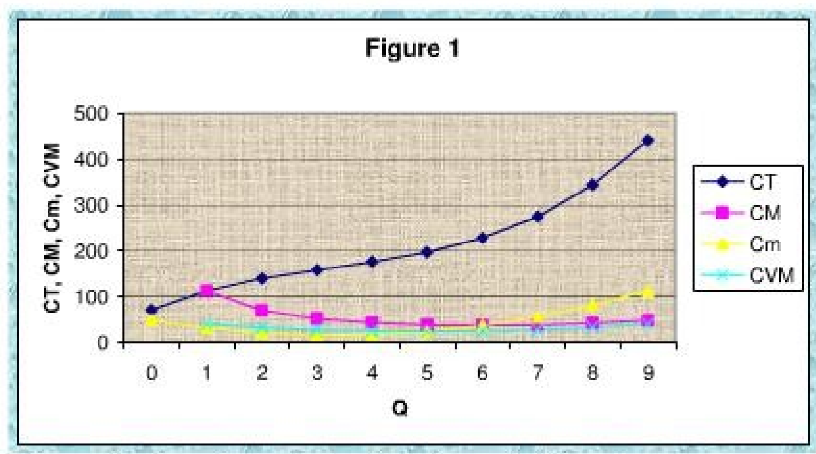
Les différentes valeurs du coût variable moyen (voir tableau) sont calculées comme suit :

Pour Q = 1 ⇒ CVM = 1 – 10 + 50 = 41.
Pour Q = 2 ⇒ CVM = 4 – 20 + 50 = 34.

Les valeurs CT, CM, Cm ET CVM, pour L variant de 1 à 9 sont représentées dans le tableau suivant :

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CT	72	113	140	159	176	197	228	275	344	441
CM	--	113	70	53	44	39,4	38	39,29	43	49
Cm	50	33	22	17	18	25	38	57	82	113
CVM	--	41	34	29	26	25	26	29	34	41

Les courbes CT, CM, Cm et CVM sont représentés sur la figure 1 :



b- Analyse de la courbe de coût total représentée sur la figure 1 :
Le coût total est une fonction croissante de la quantité produite. Une analyse plus précise de la fonction de coût total doit s'appuyer sur l'étude de sa dérivée, qui est aussi égale à la fonction de coût marginal de l'entreprise.
A partir de la figure 1, on peut faire les observations suivantes :
- Pour $0 < Q < 3$: le coût marginal est positif et décroissant : le coût total croit ($Cm > 0$) à taux décroissant (Cm décroît).
- Pour $Q > 3$: le coût marginal est positif et croissant : le coût total croit ($Cm>0$) à taux croissant (Cm croît).
- Au point I ($\bar{Q} = 3$; $\overline{CT} = 159$), la concavité de la courbe de coût total change de sens, le point I est donc point d'inflexion.

Vérification de l'existence du point d'inflexion I :
Au point d'inflexion, la dérivée seconde de la fonction de coût total doit être nulle et sa dérivée première ne doit pas changer de signe.
La dérivée première de la fonction de coût total est égale au coût marginal (Cm).
La dérivée seconde de la fonction de coût total (CT'') est donc égale à la dérivée de la fonction de coût (Cm').

$Cm = 3Q^2 - 20Q + 50$, donc $Cm' = 6Q - 20$.

On peut écrire : $CT'' = Cm' = 0 \Rightarrow 6Q - 20 = 0$, soit $6Q = 20$ d'où $Q = \frac{20}{6} = 3,33$.

La dérivée première $CT' = Cm = 3Q^2 - 20Q + 50$ est toujours positive.
Rappel : un trinôme de deuxième degré « $y = ax^2 + bx + c$ » est toujours du signe de « a » si son discriminant est négatif.
On peut calculer le discriminant réduit Δ' du trinôme considéré, puisque : $b = -20 = 2b'$; donc : $b' = 10$.
Soit : $\Delta' = b'^2 - ac = 100 - (3\times50) = -50$, donc $\Delta' < 0 \Rightarrow Cm > 0$, car $a = 3$ est positif.
Pour $Q = \frac{10}{3}$, $CT'' = 0$ et CT' ne change pas de signe ; le point I, de coordonnées $Q = \frac{10}{3}$ et $CT = 164,59$, est un point d'inflexion de la courbe CT.

c- Explication des positions respectives des courbes CM et Cm :
Calculons la dérivée première de la fonction de coût moyen et étudions son signe, soit $CM' = \frac{dCM}{dQ}$ avec $CM = \frac{CT}{Q}$ et $CT = CT(Q)$.

Il s'agit d'une fonction composée de la forme « $y = \frac{u}{v'}$ » qui admet une dérivée de la forme : « $y = \frac{u}{v'}$ » qui admet une dérivée de la forme :

$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ où « u = CT » et « v = Q ».

$$CM' = \frac{\frac{dCT}{dQ}Q - CT\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = \frac{Cm\times Q - CT}{Q^2} = \frac{Cm}{Q} - \frac{CT}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left(Cm - \frac{CT}{Q}\right) = \frac{1}{Q}(Cm - CM).$$

CM' a donc le même signe que (Cm – CM).
- Pour $Cm - CM < 0 \Rightarrow CM' < 0$ et $Cm < CM$: le coût moyen décroît ($CM' < 0$) tant que le coût marginal lui, est inférieur.
- Pour $Cm - CM = 0 \Rightarrow CM' = 0$ et $Cm = CM$: le coût moyen ne décroît plus et ne croît pas non plus ($CM' = 0$). Quand le coût moyen atteint un minimum, il est égal au coût marginal. On peut observer sur la figure 1 que pour $Q = 6$; $CM = Cm = 38$.
- Pour $Cm - CM > 0 \Rightarrow CM' > 0$ et $Cm > CM$: le coût moyen ($CM' > 0$) et dans ce cas le coût marginal lui est supérieur.

d- En procédant comme dans la question précédente, on démontre que le coût variable moyen est coupé en son minimum par le coût marginal, qu'il est décroissant tant que le coût marginal lui est inférieur et croissant dès qu'il est supérieur. Sachant que CVM' $= \frac{Cm\times Q - CVT}{Q^2} = \frac{1}{Q(Cm - CVM)}$.